

ランダムな点から線分、 多角形までの最近隣距離のモーメント

1. はじめに
2. 線分までの最近隣距離の確率密度関数
3. モーメントの算出
4. おわりに

吉川 徹*

要 約

この論文の目的は、ある区域にいくつかのあらかじめ固定された線分や多角形があるときに、ランダムな点からもよりの線分や多角形までの最短距離（最近隣距離）の確率密度関数の高次モーメントを求めることである。このため、まず区域内に線分のポロノイ図を生成し、そのポロノイ図を4種類の単位領域に分解する。最近隣距離の確率密度関数はおのおの単位領域に対応する項の和であることが知られている。続いてこの各項の式をもとにして、積分によってモーメントを求める。最後に境界の取り扱い方について触れる。

1 はじめに

この論文の目的は、ある区域にいくつかの線分や多角形があるときに、ランダムな点からもよりの線分や多角形までの最短距離の確率密度関数の高次モーメントを求めることである。

都市、地域の研究では、ある地域のなかで、ランダムな点から、もよりの駅、道路、川、公園、湖など（点、線、多角形で表わされる）までの最短距離（最近隣距離とよばれる）について分析する機会が少なくない（たとえば伊理他（1986）を参照されたい）。たとえば、ニュータウンの公園配置計画の評価問題を考えてみよう。このとき、ニュータウンの住宅地にランダムに落とされた点（公園利用者の住居にあたる）から公園までの最近隣距離の分布を調べることによって、公園配置計画を評価することができる。

とくに、この最近隣距離の確率密度関数のモー

メントは、公園配置計画の評価指標として使うことができる。たとえば、確率密度関数の平均値（1次モーメント）は、このニュータウンの住宅地から公園までの平均距離であるので、住宅地から公園へのアクセシビリティの指標となる。また分散（2次モーメントから求められる）が大きい場合には、公園までのアクセシビリティが場所によっておおきく違っていると考えられ、その公園配置計画は公平の観点からは望ましくない。

ランダムな点から固定された点、線分、多角形までの最近隣距離については、いわゆる Nearest Neighbor Distance Method（たとえば Upton and Fingleton（1985）を参照）のなかの Point-Plant Distance の問題として、地理学を中心に多くの研究が行なわれてきた。とくに、ランダムな点から固定された点まで最近隣距離については、確率密度関数が Okabe and Miki（1981）（1984）によって求められている。さらに、実際に計算するとき

に問題になる境界の取り扱いについて谷村他(1986)のくわしい分析がある。また、確率密度関数のモーメントはOkabe(1987)によって漸化式の形で求められている。

これに対して、ランダムな点から固定された線分、多角形に対する最近隣距離について研究が行なわれるようになったのはより最近である。この場合の確率密度関数については、まずOkabe and Fujii(1984)が線分で構成されたネットワークに対する最近隣距離の確率密度関数をスプライン関数を用いて計算する方法を提案した。続いて吉川(1987), Okabe, Fujii, Oikawa and Yoshikawa(1988)によって、一般の線分および多角形に対する最近隣距離の確率密度関数を数式の形で正確に求める方法が提案された。しかし、この確率密度関数のモーメントについてはまだ求められていない。そこでこの論文では、このモーメントを求めることを目的とする。

このため、まず第2章ではモーメントの計算に必要な準備として、吉川(1987), Okabe, Fujii, Oikawa and Yoshikawa(1988)に従って確率密度関数を定式化する。さらに第3章ではこの確率密度関数をもとにモーメントを計算する。最後に第4章で今後の課題をのべる。

なお、多角形までの最近隣距離のモーメントを求める計算においては、多角形の辺を線分の集合と見なせば、線分と同じやりかたで計算することができる。さらにつながった線分と、おたがいに離れている線分はほぼ同じ取り扱いができる。そこでこれからはおたがいに離れている線分に限って議論を進めることとする。

2 線分までの最近隣距離の確率密度関数

2.1 確率関数とポロノイ図

例として、図1に示すように、ある区域の中に5本の固定された線分が存在する状況を考えよう。ここからはこの線分を母線分とよぶことにする。区域内にランダムに落された点(図1のp)から、もよりの母線分までの最短距離(最近隣距離)は図1の x_p で表わされる。この最近隣距離が x 以

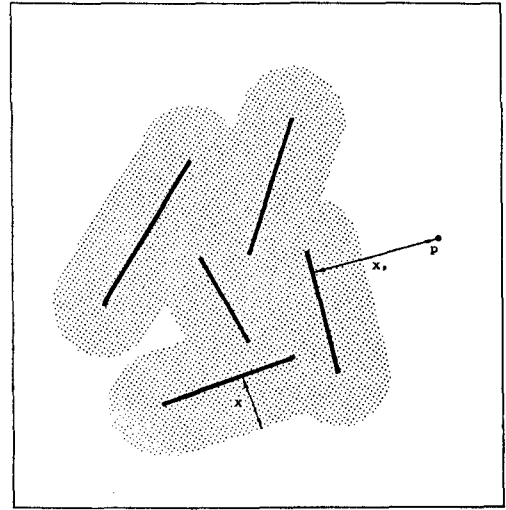


図1 与えられた線分(太線)とランダムな点(p)

下である確率を $F(x)$ と書くと、

$$F(x) = \frac{A(x)}{A_{\text{total}}} \quad (1)$$

である。ただし、

$A(x)$: 区域内で、母線分から距離が x 以下である区域(図1の影のついた部分)の面積

A_{total} : 区域の全面積

である。この式から、 $F(x)$ を求めるためには $A(x)$ が必要であることがわかる。 $A(x)$ を求めるためには、図1の区域を、どの母線分に最も近いかによって分けておくとつごうがよい(図2)。このような図はふつうポロノイ線図とよばれる。点のポロノイ線図は線分だけでできているが、線分のポロノイ線図では線分(ここからはポロノイ線分とよぶ)だけではなくて放物線(ここからはポロノイ放物線とよぶ)が含まれるのが特徴である(小久保(1985))。

2.2 単位領域

図2をくわしく調べると、線分のポロノイ線図はつぎの4種類の領域(単位領域とよぶことにする)の集合体であることがわかる(小久保(1985)、吉川(1987))。

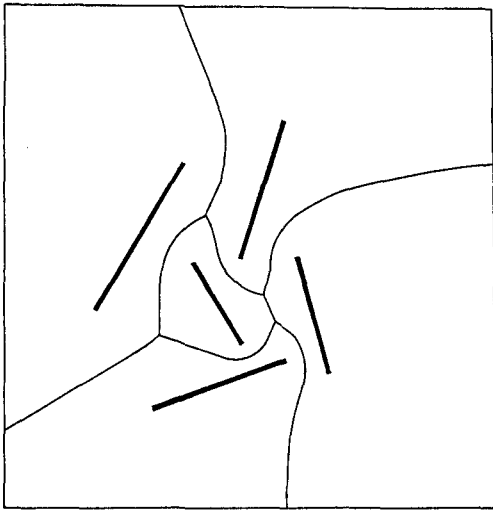


図2 線分(太線)のボロノイ線図(細線)

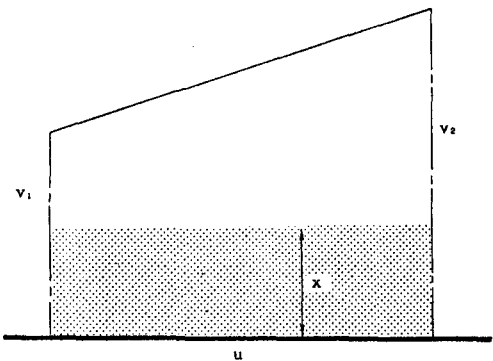


図3 TYPE-1の単位領域

・TYPE-1 (図3)

母線分(図3の太線)，母線分に垂直な2本の線分(一点鎖線：端線とよぶことにする)と，ボロノイ線分(細線)で囲まれた領域である。なお，ここからは，この単位領域のいろいろな寸法を表わすのにつぎの記号を使う(図3)。

- u : 母線分のうち，単位領域の辺となっている部分の長さ
- v₁ : 短い方の端線の長さ
- v₂ : 長い方の端線の長さ

・TYPE-2 (図4)

母線分(図4の太線)，母線分に垂直な2本の端線(一点鎖線)，ボロノイ放物線(細線)で囲

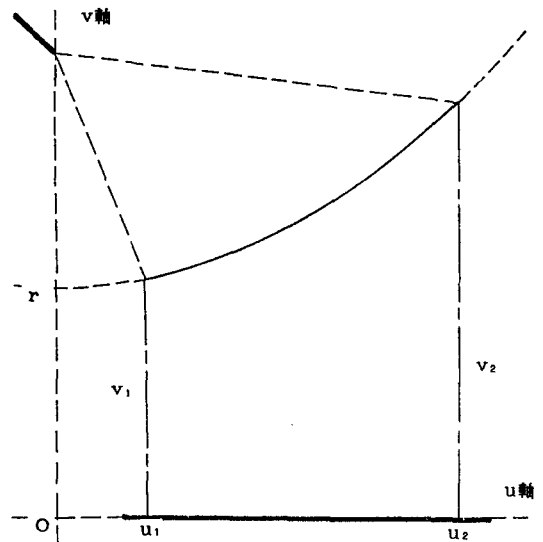


図4 TYPE-2の単位領域

まれた領域である。ボロノイ放物線が放物線の頂点を含んでいる場合(図5)は，頂点を通して母線分に垂直な線分で左右の2個の単位領域に分ければ図4の形になる。

なお，ボロノイ放物線の準線は母線分であり，焦点は反対側の母線分の端点である。そこでここからは，焦点から母線分の延長上におろした垂線の足を原点Oとし，原点から母線分の方にu軸，焦点の方にv軸をとる。さらにつぎの記号を使う(図4)。

- u₁ : u軸上で原点から単位領域の近い方の端までの距離
- u₂ : u軸上で原点から単位領域の遠い方の端までの距離
- r : v軸上で原点から放物線の頂点までの距離(原点から焦点までの距離の半分に等しい)
- v₁ : 短い方の端線の長さ
- v₂ : 長い方の端線の長さ

これらによって，ボロノイ放物線の式はつぎの式で表わされる(小久保(1985))。

$$v = \frac{u^2}{4r} + r \tag{2}$$

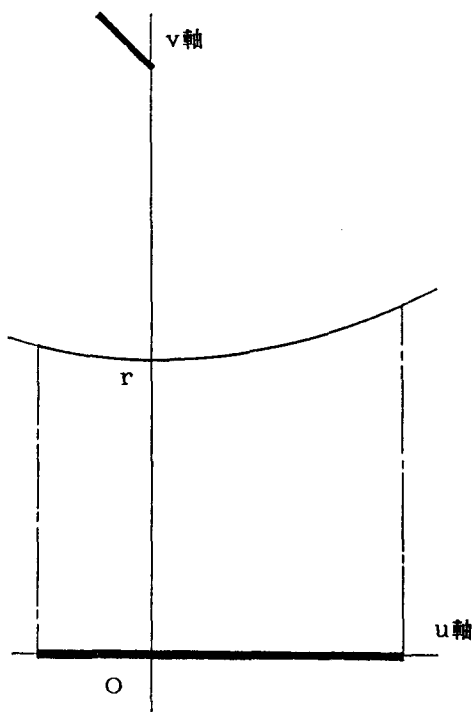


図5 TYPE-2の単位領域 (左右に分割する例)

・TYPE-3 (図6)

母線分(太線)の端点をとる2本の辺(一点鎖線)とポロノイ線分(細線)で囲まれた三角形である。これは、点のポロノイ図を分割したときにでてくる形とおなじものである(Okabe (1987)を参照)。この単位領域では、母線分の端点からポロノイ線分の延長上におろした垂線の足を原点Oとし、ポロノイ線分方向にu軸、母線分の端点方向にv軸をとると取り扱いがやさしくなる。

さらに、つぎの記号をつかう。

- w_1 : 短い方の辺の長さ
- w_2 : 長い方の辺の長さ
- v_0 : 母線分の端点と原点Oの距離
- u_1 : 原点からポロノイ線分の近い方の端点までの距離
- u_2 : 原点からポロノイ線分の遠い方の端点までの距離
- θ_1 : v軸と近い方の辺がなす角
- θ_2 : v軸と遠い方の辺がなす角

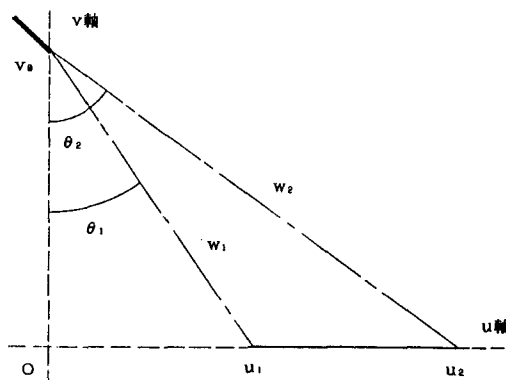


図6 TYPE-3の単位領域

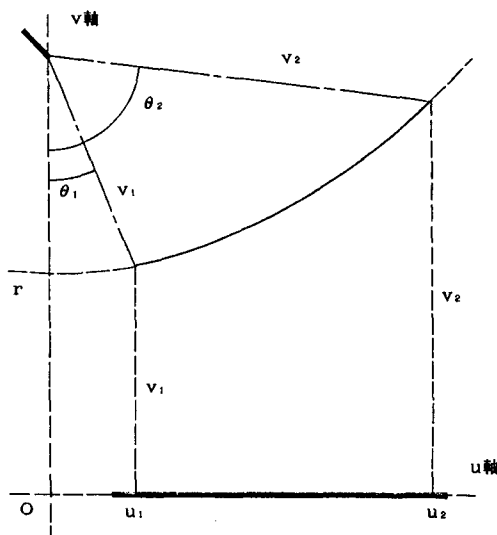


図7 TYPE-4の単位領域

・TYPE-4 (図7)

TYPE-3と似ているが、ポロノイ線分ではなく、ポロノイ放物線が境界線になっている。この単位領域はTYPE-2の領域と対になっているので、記号としてはTYPE-2とおなじものを使う。ただし、角度についての記号をあわせて使うと取り扱いがやさしくなる。

- θ_1 : v軸と近い方の端線がなす角
- θ_2 : v軸と遠い方の端線がなす角

2. 3 確率密度関数とモーメント

図1のポロノイ線図を2. 2節の4種類の単位領域に分けたとすると、2. 1で示した確率関数

(1)式はつぎの通りに書き直せる。

$$F(x) = \frac{1}{A_{total}} \times \left\{ \sum_{i=1}^{m_1} A_{1i}(x) + \sum_{i=1}^{m_2} A_{2i}(x) + \sum_{i=1}^{m_3} A_{3i}(x) + \sum_{i=1}^{m_4} A_{4i}(x) \right\} \quad (2)$$

ただし、

$A_{ki}(x)$: TYPE-k の第 i 番目の単位領域で、母線分までの最近隣距離が x 以下である部分の面積 (たとえば図3の影部)

m_k : TYPE-k の単位領域の数である。

この(2)式を x で微分すれば、確率密度関数が得られる。これを $f(x)$ とすれば、

$$f(x) = \frac{1}{A_{total}} \times \left\{ \sum_{i=1}^{m_1} a_{1i}(x) + \sum_{i=1}^{m_2} a_{2i}(x) + \sum_{i=1}^{m_3} a_{3i}(x) + \sum_{i=1}^{m_4} a_{4i}(x) \right\} \quad (3)$$

である。ただし、

$$a_{ki}(x) = \frac{dA_{ki}(x)}{dx}$$

である。

3 モーメントの算出

3.1 モーメントの算出法

確率密度関数のモーメントには、原点のまわりのものと母平均のまわりのものがあるが、ここでは原点のまわりのものを求めることにする。これは、(3)式からは原点のまわりのものの方が求めやすいことと、原点のまわりのモーメントがあれば母平均のまわりのモーメントは求められるからである。

原点のまわりの n 次モーメントを求めるには、

(3)式の両辺に x^n を掛け、x について 0 から x の最大値 (つまり、区域内の任意の点からもよりの母線分までの距離の最大値、以下では x^+ で表わす) まで積分すればよい。したがって、(3)式より、n 次モーメントを $fn(x)$ とすれば、

$$fn(x) = \frac{1}{A_{total}} \left\{ \sum_{k=1}^4 \sum_{i=1}^{m_k} \int_0^{x^+} x^n a_{ki}(x) dx \right\} \quad (4)$$

である。この式から、4 種類の単位領域についてつぎの積分を求めれば、 $fn(x)$ が求められることがわかる。

$$\int_0^{x^+} x^n a_{ki}(x) dx \quad (5)$$

そこで、ここからは、それぞれの単位領域について(5)式を求める。

3.2 TYPE-1 の単位領域での積分

TYPE-1 の領域では、

$$A_{1i}(x) = \begin{cases} \cdot ux & (0 \leq x \leq v_1) \\ \cdot -\frac{u(x-v_1)^2}{2(v_2-v_1)} + ux & (v_1 \leq x \leq v_2) \\ \cdot \frac{(v_1+v_2)u}{2} & (v_2 \leq x) \end{cases} \quad (6)$$

である (吉川 (1987))。従って、

$$a_{1i}(x) = \begin{cases} \cdot u & (0 \leq x \leq v_1) \\ \cdot -\frac{u(x-v_1)}{(v_2-v_1)} + u & (v_1 \leq x \leq v_2) \\ \cdot 0 & (v_2 \leq x) \end{cases} \quad (7)$$

である。

これよりつぎの式が求められる。

$$\int_0^{x^+} x^n a_{1i}(x) dx =$$

$$\frac{u(v_2^{n+2} - v_1^{n+2})}{(v_2 - v_1)(n+1)(n+2)} \tag{8}$$

3. 3 TYPE-2の単位領域での積分

TYPE-2の単位領域では、

$$A_{2i}(x) = \begin{aligned} &\cdot x(u_2 - u_1) \quad (0 \leq x \leq v_1) \\ &\cdot -\frac{4r^{1/2}}{3}(x-r)^{3/2} - \frac{u_1^3}{12} \\ &\quad - ru_1 + u_2x \quad (v_1 \leq x \leq v_2) \\ &\cdot r(u_2 - u_1) + \frac{(u_2^3 - u_1^3)}{12r} \quad (v_2 \leq x) \end{aligned} \tag{9}$$

である(吉川(1987))。従って、

$$a_{2i}(x) = \begin{aligned} &\cdot u_2 - u_1 \quad (0 \leq x \leq v_1) \\ &\cdot -2r^{1/2}(x-r)^{1/2} + u_2 \quad (v_1 \leq x \leq v_2) \\ &\cdot 0 \quad (v_2 \leq x) \end{aligned} \tag{10}$$

となる。

これよりつぎの式が求められる。

$$\int_0^{x^+} x^n a_{2i}(x) dx = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} \binom{n+1}{i} r^{n+1-2i} \frac{(u_2^{2i+1} - u_1^{2i+1})}{(2i+1)2^{2i}} \tag{11}$$

3. 4 TYPE-3の単位領域での積分

TYPE-3の単位領域では、

$$A_{3i}(x) = \begin{aligned} &\cdot \frac{x^2(\theta_2 - \theta_1)}{2} \quad (0 \leq x \leq w_1) \\ &\cdot \frac{v_0 \{ (x^2 - v_0^2)^{1/2} - u_1 \}}{2} + \\ &\quad \frac{x^2}{2} (\theta_2 - \arccos \frac{v_0}{x}) \quad (w_1 \leq x \leq w_2) \end{aligned}$$

$$\cdot \frac{v_0(u_2 - u_1)}{2} \quad (w_2 \leq x) \tag{12}$$

である(吉川(1987))。従って、

$$a_{3i}(x) = \begin{aligned} &\cdot x(\theta_2 - \theta_1) \quad (0 \leq x \leq w_1) \\ &\cdot x(\theta_2 - \arccos \frac{v_0}{x}) \quad (w_1 \leq x \leq w_2) \\ &\cdot 0 \quad (w_2 \leq x) \end{aligned} \tag{13}$$

である。

これに x^n をかけて積分した場合、 n が偶数か奇数かによって結果が異なる。

$$n \text{ が偶数の場合には,} \\ n = 2p - 2 \quad (p \geq 1)$$

とおけば、

$$\int_0^{x^+} x^n a_{3i}(x) dx = \frac{(2p-2)!!}{2p(2p-1)!!} \sum_{j=0}^{p-1} \frac{(2j-1)!!}{(2j)!!} \{ u_2(u_2^2 + v_0^2)^j - u_1(u_1^2 + v_0^2)^j \} v_0^{2p-2j-1} \tag{14}$$

一方、 n が奇数の場合には、

$$n = 2p - 1 \quad (p \geq 1)$$

とおけば、

$$\int_0^{x^+} x^n a_{3i}(x) dx = \frac{(2p-1)!!}{(2p+1)(2p)!!} \left[\sum_{j=0}^{p-1} \frac{(2j)!!}{(2j+1)!!} v_0^{2p-2j-1} \{ u_2(u_2^2 + v_0^2)^{j+1/2} - u_1(u_1^2 + v_0^2)^{j+1/2} \} + v_0^{2p+1} \log \frac{(v_0^2 + u_2^2)^{1/2} + u_2}{(v_0^2 + u_1^2)^{1/2} + u_1} \right] \tag{15}$$

なお、この結果は Okabe (1987) の結果として得られた漸化式と等価な式である。

3. 5 TYPE-4 の単位領域での積分

TYPE-4 の単位領域では、

$$\begin{aligned}
 A_{4i}(x) = & \\
 & \cdot \frac{x^2(\theta_2 - \theta_1)}{2} \quad (0 \leq x \leq v_1) \\
 & \cdot \frac{r^{1/2}}{3}(x + 2r)(x - r)^{1/2} \\
 & \cdot \frac{ru_1}{2} - \frac{u_1^3}{24r} \\
 & + \frac{x^2}{2} \left\{ \theta_2 - \arccos\left(\frac{2r}{x} - 1\right) \right\} \quad (v_1 \leq x \leq v_2) \\
 & \cdot \frac{(u_2^3 - u_1^3)}{24r} - \frac{r(u_2 - u_1)}{2} \quad (v_2 \leq x)
 \end{aligned} \tag{16}$$

である(吉川(1987))。従って、

$$\begin{aligned}
 a_{4i}(x) = & \\
 & \cdot x(\theta_2 - \theta_1) \quad (0 \leq x \leq v_1) \\
 & \cdot x \left\{ \theta_2 - \arccos\left(\frac{2r}{x} - 1\right) \right\} \quad (v_1 \leq x \leq v_2) \\
 & \cdot 0 \quad (v_2 \leq x)
 \end{aligned} \tag{17}$$

である。

これよりつぎの式が求められる。

$$\begin{aligned}
 \int_0^{x^+} x^n a_{4i}(x) dx = & \\
 & \frac{1}{n+2} \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} \frac{r^{n+1-2i}}{(2i+1)2^i} \\
 & (u_2^{2i+1} - u_1^{2i+1})
 \end{aligned} \tag{18}$$

3. 6 境界線の処理

これまでに述べたことから、ランダムな点から線分、多角形に対する最近隣距離の確率密度関数の原点のまわりのモーメントは、3. 2から3. 5に示す式の和として求められることがわかる。

ただし、領域の境界線(図1の外側の線)沿いでは多少の変更が必要になる。そこで、境界線が

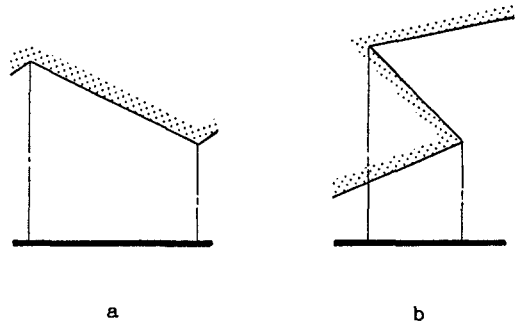


図8 境界線の処理

すべて線分で表わされているとして、その取り扱い方を検討する。

まず、図8-aのように境界線(細線)の外側(影の部分)が母線分(太線)の側を向いていない場合には、境界線をポロノイ線分と見なせば、確率密度関数に関してTYPE-1, TYPE-3とまったく同じ取り扱い方で計算できる(吉川(1987))。したがって、モーメント計算のための積分(3. 2節, 3. 4節)もそのまま使える。

一方、図8-bのように境界線の外側が母線分の側を向いている場合には、そのまま境界線をポロノイ線分と見なして単位領域をつくると、複数の単位領域が重なることになる。ランダムな点から固定された点までの最近隣距離の確率密度関数については、谷村他(1986)によって、境界線の外側が母線分の側を向いている単位領域だけは符号を負にすればよいことが証明された。ランダムな点から固定された線分、多角形までの最近隣距離の確率密度関数についても同じ取り扱いをすればよいことが吉川(1987)によって証明されている。このことから、モーメントを計算するときにも、境界線の外側が母線分の側を向いている単位領域は符号を負にすればよいことがわかる。

4 おわりに

この論文では、ランダムな点から線分、多角形に対する最近隣距離の確率密度関数の原点のまわりのモーメントは、数式の形で求めることができ、また境界線も厳密に取り扱えることが示された。

これからの課題として、この結果をもとにした実証研究があげられる。

謝辞

この論文をまとめるにあたっては、東京大学工学部都市工学科の岡部篤行助教授から多くの示唆をうけた。また研究の過程で、小久保岩生氏による線分のボロノイ線図生成プログラムと、東京大学地震研究所の瀬瀬一起氏、鷹野澄氏によるETERMプログラムを利用させていただいた。ここに記して感謝したい。

文 献 一 覧

伊理正夫（編）

1986 『計算幾何学と地理情報処理』bit別冊 共立出版。

小久保岩生

1985 「一般化ボロノイ線図の構成算法の研究」東京大学大学院工学系研究科計数工学専門課程修士論文。

谷村秀彦，梶秀樹，池田三郎，腰塚武志

1986 『都市計画数理』朝倉書店。

吉川徹

1987 「都市，地域において基盤施設の位置が点的活動の分布に及ぼす影響を分析するための手法の拡張とその適用」東京大学大学院工学系研究科都市工学専門課程修士論文。

Okabe Atsuyuki

1987 "Exact Higher Moments of the Nearest Neighbor Distance" Journal of the Faculty of Engineering, The University of Tokyo (B) 39 : 1-6

Okabe Atsuyuki, Fujii Akira

1984 "The Statistical Analysis through a Computational Method of a Distribution of Points in Relation to its Surrounding Network" Environment and Planning A 16 : 107-114

Okabe Atsuyuki, Fujii Akira, Oikawa Kiyooki and Yoshikawa Tohru

1988 "The Statistical Analysis of a Distribution of Activity Points in Relation to Surface-like Elements" Environment and Planning A 20 : 609-620

Okabe Atsuyuki, Miki Fujio

1981 "A Statistical Method for the Analysis of a Point Distribution in Relation to Network and Structural Points and its Empirical Application" DP-4, Department of Urban Engineering, The University of Tokyo

1984 "A Conditional Nearest-Neighbor Spatial-Association Measure for the Analysis of Conditional Location interdependence" Environment and Planning A 16 : 163-171

Upton, Graham J.G. and Fingleton, Bernard

1985 Spatial Data Analysis by Example: Volume I: Point Pattern and Quantitative Data: John Wiley & Sons: Chichester

Key Words (キー・ワード)

Nearest Neighbor Distance (最近隣距離), Random Point (ランダムな点), Voronoi Diagram (ボロノイ線図), Voronoi Diagram of Line Segments (線分のボロノイ線図), Voronoi Diagram of Polygons (多角形のボロノイ線図), Probability Density Function (確率密度関数), Moment (モーメント)

MOMENTS OF THE NEAREST NEIGHBOR DISTANCE
FROM A RANDOM POINT TO LINE SEGMENTS OR POLYGONS

Tohru Yoshikawa*

*Center for Urban Studies, Tokyo Metropolitan University
Comprehensive Urban Studies, Special Edition, 1989, pp.25-33

The objective of this paper is to obtain the higher moments of the probability density function of the nearest neighbor distance from a random point to fixed line segments or polygons in a region. First, the Voronoi diagram of the line segments are generated and the diagram is divided into unit-districts of four types. Second, the moment is calculated through integration in each unit-district. Last, the treatment of the boundary is discussed.